

函数凸性的新判据

刘仁义

(陇东学院数学系,甘肃庆阳 745000)

摘 要: 关于凸函数的判定,通常多用微商和二阶微商。“改微为差”,改导数和二阶导数分别为对称导数与二阶对称导数,即可得到判定函数凸性的四个重要结论。

关键词: 凸函数; 差商; 导数; 对称导数

中图分类号: O174.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-612x(2004)05-0009-03

1 预备知识

定义 设 f 定义在 (a, b) 上,若对 $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, 及 $\forall t \in [0, 1]$, $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$, 则称 f 是 (a, b) 上的凸函数。

定理 1 f 定义在 (a, b) 上,下面的结论是等价的:

(1) f 是 (a, b) 上的凸函数

(2) 对 $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 连接点 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ 的线段位于曲线 $y = f(x)$ 的上方

$$\text{即 } f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad (x_1 \leq x \leq x_2)$$

$$\text{或 } \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (x_1 < x < x_2)$$

(3) 对 $\forall x_0 \in (a, b)$, $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 是 x 的递增函数

(4) f 在 (a, b) 内连续, 且对 $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ ^[1]

2 判据 1(差商法)^[2]

定理 2 令 $\varphi(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ $x \neq y$, $\Psi(x, y, z) = (\frac{f(x) - f(z)}{x - z}) - (\frac{f(y) - f(z)}{y - z}) / (x - y)$,

此处 x, y, z 互不相等, 则下面的结论是等价的:

(1) f 是 (a, b) 上的凸函数

(2) $\varphi(x, y)$ 是每个变量的递增函数

(3) $\Psi(x, y, z) \geq 0$

证明: 由 x, y 的对称性及定理 1 即得, (1) \Leftrightarrow (2)。

收稿日期: 2004-03-31

作者简介: 刘仁义(1960~), 男, 副教授, 从事函数论和高师数学教育教学研究。

(2) \Rightarrow (3) 由对称性,不妨设 $x < y < z$, 由(2) 即得

$$\frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}, \text{故 } \Psi(x, y, z) \geq 0.$$

(3) \Rightarrow (1) 对 $\forall x, y \in (a, b), x \neq y$, 不妨设 $x < y$, 对 $\forall t \in (0, 1)$, 令 $z = tx + (1 - t)y$, 由(3) 得 $\Psi(x, y, z) \geq 0$, 而 $x - y < 0$, 故对 $x, y, z = tx + (1 - t)y$ 有 $\frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$, 整理即得 $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$, 显然, 当 $x = y, t = 0, 1$ 时, 该式亦成立, 由定义, f 是凸的。

差商法是判定函数凸性的一种比较初等的方法。

3 判据 2(对称导数法)

由上面的讨论可以得到, 凸函数是连续函数且点点左、右可导, 但一个 (a, b) 上的凸函数可能存在可数多个不可导点。所以, 从广义上讲, 用导数判定函数的凸性是有局限性的。然而, 把导数改为对称导数结论就会好的多。

对称导数又叫许瓦兹导数, 其是较单侧导数更弱的一种导数, 是判定函数凸性的一个有力工具。

定义 设 f 定义在 (a, b) 上, 若对 $\forall x \in (a, b), f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ 存在, 则称函数 $f(x)$ 为 $f(x)$ 的一阶对称导数。若对 $\forall x \in (a, b), D_2f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$ 存在, 则称 $D_2f(x)$ 为 $f(x)$ 的二阶对称导数。

引理 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内对称可导, 且 $A \leq f'(x) \leq B$, 则 $A \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq B^{[3]}$

定理 3 设 f 在 (a, b) 上连续, 则 f 在 (a, b) 上凸的充要条件是 f 在 (a, b) 上对称可导, 且 $f'(x)$ 在 (a, b) 上单调递增。

证明: 必要性 因为 f 在 (a, b) 上凸, 故 f 在 (a, b) 上处处左、右可导, 从而也对称可导。又根据 f 在 (a, b) 上凸, 所以, 对 $\forall x < u < v < y, x, u, v, y \in (a, b)$

$$\frac{f(u) - f(x)}{u - x} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(y) - f(v)}{y - v}$$

故, 对 $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$, 当 h 充分小时 (只要使 $2h < x_2 - x_1, x_1 - h, x_2 + h \in (a, b)$, 即可)

令 $x = x_1 - h, u = x_1 + h, v = x_2 - h, y = x_2 + h$, 将其代入上式, 即得

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1 - h)}{2h} \leq \frac{f(x_2 - h) - f(x_1 + h)}{x_2 - x_1 - 2h} \leq \frac{f(x_2 + h) - f(x_2 - h)}{2h}$$

令 $h \rightarrow 0$ 即得 $f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$ 。此既 $f'(x)$ 在 (a, b) 上单调递增。

充分性 由定理 1, 只需证对 $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$, 及一切 $x \in (x_1, x_2)$, $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$ 即可。事实上, 由于 $f'(x)$ 在 (a, b) 上递增, 故 $A = \sup_{y \in (x_1, x)} f'(y) \leq \inf_{y \in (x, x_2)} f'(y) = B$, 由引理可得, $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq A \leq B \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$, 因此 f 是凸的。

定理 4 设 f 在 (a, b) 上连续, 且在 (a, b) 上二阶对称可导, 则 f 在 (a, b) 上凸的充要条件是 $D_2f(x) \geq 0$

证明: 充分性 由定理 1, 只需证对 $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$, 及一切 $x \in (x_1, x_2)$, 有 $f(x) \leq f(x_1) +$

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ 即可。

(1) 先证当 $D_2f(x) > 0$ 时, 命题成立。

事实上, 令 $\varphi(x) = f(x) - [f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)]$

则 $\varphi(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续, 且 $D_2\varphi(x) = D_2f(x) > 0$, 因为 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$, 所以, 在 (x_1, x_2) 上 $\varphi(x) \leq 0$, 否则的话, $\varphi(x)$ 在 (x_1, x_2) 内某一点 x_0 取得最大值 $\varphi(x_0)$, 于是, $\frac{\varphi(x_0 + h) + \varphi(x_0 - h) - 2\varphi(x_0)}{h^2} \leq 0$, 由此即得, $D_2\varphi(x_0) \leq 0$, 此与上述矛盾, 故对一切 $x \in (x_1, x_2)$, $\varphi(x)$

≤ 0 , 即 $f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, 此即 f 在 (a, b) 上凸。

(2) 当 $D_2f(x) \geq 0$ 时, 对 $\forall n \in N^+$, 令 $g_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}x^2$, 则, $D_2g_n(x) = D_2f(x) + \frac{2}{n} > 0$, 由(1) 每个 $g_n(x)$ 在 (a, b) 上凸, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x)$ 在 (a, b) 上凸, 必要性显然。

因为 f 在 (a, b) 上凸, 故对 $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

于是, 对 $\forall x \in (a, b)$ $f(x) = f(\frac{(x+h) + (x-h)}{2}) \leq \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}$,

所以, $D_2f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \geq 0$ 。

参考文献:

- [1] 史树中. 凸分析[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1990: 72.
- [2] A. C. M. Van Rooij and W. H. Schikhof. A second course on real functions. Cambridge: Cambridge university press. 1982: 15.
- [3] 刘仁义. 对称导数在研究函数性质中的应用[J]. 庆阳师专学报(自然科学版), 1994(1): 63 ~ 64.

On New Criteria of Functional Convexity

LIU Ren-yi

(Mathematics Department of Longdong University, Qingyang, Gansu 745000)

Abstract: Generally, derivative and second-order derivative are used to decide functional convexity. Four important conclusions of deciding functional convexity will be available by converting derivative into differential quotient, derivative and second-order derivative into symmetric derivative and second-order symmetric derivative respectively.

Key words: convex function; differential quotient; derivative; symmetric derivative